

7. Analiza sieci pert metodą symulacji komputerowej

7.1. Wprowadzenie

Metoda planowania sieciowego *PERT* (*Program Evaluation and Review Technique*) została opracowana w 1958 r. i od tego czasu jest powszechnie stosowanym narzędziem wspomagającym planowanie przedsięwzięć budowlanych w warunkach losowych. Jej popularność wynika z tego, że przyjęte założenia umożliwiły uproszczenie analizy modeli sieciowych dla warunków niedeterministycznych. Drugą zaletą metody jest prosty sposób estymacji parametrów zmiennych losowych czasów trwania procesów budowlanych, bazujący na doświadczeniu uczestników procesu inwestycyjnego (ekspertów).

Konkurencyjnym narzędziem wykorzystywanym przy planowaniu przedsięwzięć budowlanych w warunkach losowych oraz w analizie ryzyka jest metoda symulacji cyfrowej *Monte Carlo*. Zaletą metody symulacji jest możliwość analizowania modeli sieciowych złożonych z czynności, których czas trwania jest opisany dowolnymi rozkładami prawdopodobieństwa, bez konieczności wprowadzania dodatkowych założeń upraszczających. W metodzie symulacji *MC* można modelować dowolne ograniczenia czasowe, zasobowe i kolejnościowe. Ograniczenia takie występują przy realizacji przedsięwzięć budowlanych, kiedy kooperuje ze sobą duża liczba niezależnych podmiotów gospodarczych.

Celem badań w niniejszym rozdziale było wskazanie możliwości zastosowań metody symulacji *Monte Carlo*, w celu uwzględnienia ograniczeń realizacyjnych występujących podczas realizacji przedsięwzięć budowlanych. W kolejnych podrozdziałach opracowania scharakteryzowano problematykę analizy modeli sieciowych przedsięwzięć realizowanych w warunkach niedeterministycznych oraz zidentyfikowano problemy praktycznego stosowania metody symulacji *Monte Carlo*. W zamieszczonym przykładzie zilustrowano sposób analizy modelu sieciowego przedsięwzięcia oraz możliwości uwzględnienia ograniczeń czasowych i zasobowych.

Metoda symulacji komputerowej modeli przedsięwzięć budowlanych zapewnia uzyskanie wiarogodnych oszacowań terminów realizacji etapów i całego przedsięwzięcia budowlanego. Podstawowym ograniczeniem jej stosowania praktycznego jest konieczność stosowania wspomagania komputerowego – znajomości języków programowania lub korzystania z oprogramowania komercyjnego.

7.2. Ogólna charakterystyka problemu analizy modeli sieciowych z niedeterministycznymi czasami realizacji procesów

W budownictwie przy projektowaniu przedsięwzięć budowlanych w warunkach ryzyka i niepewności, gdy czasy wykonania procesów nie są ustalone w sposób deterministyczny, stosuje się metodę *PERT* oraz metodę symulacji komputerowej.

W metodzie *PERT* przyjęto, że czas realizacji przedsięwzięcia jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, jako suma niezależnych zmiennych losowych czasów realizacji procesów krytycznych. Założenie to bazuje na centralnym twier-

¹⁰ Sławomir Biruk, dr inż., Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Lubelska

dzeniu granicznym (tw. Lindeberga–Fellera): jeżeli $E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)$ są wartościami oczekiwanymi, a $D^2(X_1), D^2(X_2), \dots, D^2(X_n)$ wariancjami zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n o różnych rozkładach prawdopodobieństwa f_1, f_2, \dots, f_n , to rozkład zmiennej losowej $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ dąży, przy $n \rightarrow \infty$, do rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

i wariancji:

$$D^2(X) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n).$$

W praktyce dobre przybliżenie rozkładu normalnego można uzyskać, gdy ścieżkę krytyczną tworzy ponad 30 procesów, w ostateczności 20 lub nawet 10. Dokładność oszacowania terminu zakończenia realizacji przedsięwzięcia w dużej mierze zależy będzie od liczby procesów krytycznych, a także od podobieństw rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych czasu realizacji procesów należących do ścieżki krytycznej.

Założenie o normalnym rozkładzie terminu realizacji całego przedsięwzięcia jest prawdziwe w przypadku niezależności sumowanych zmiennych losowych i pod warunkiem, że termin rozpoczęcia dowolnego procesu następuje w momencie zakończenia dokładnie jednego procesu poprzedzającego. W konsekwencji nie uwzględnia się wpływu dróg zbiegających się w węzłach sieci – o terminie zaistnienia zdarzenia decyduje droga dochodząca do węzła złożona z czynności należących do ścieżki o największej sumie wartości oczekiwanej czasów realizacji procesów, a pomijane są drogi pozostałe. Wpływ tych dróg może być duży, szczególnie w przypadku, gdy ich długości nie różnią się istotnie od drogi najdłuższej (dla czasów średnich), a wariancje ich zmiennych losowych są większe od wariancji czasu dla drogi uwzględnianej w obliczeniach. Termin wyznaczony w sposób dokładny może być nawet o 25% dłuższy od obliczonego zgodnie z metodą *PERT* (Jaworski, 1999).

Skutkiem przyjętego założenia, że procesy muszą rozpoczynać się zaraz po zakończeniu poprzedników, jest niemożliwość uwzględniania innych strategii rozpoczynania procesów. Nie można na przykład ująć w modelu ograniczenia, że proces nie może rozpocząć się wcześniej od ustalonego terminu, gdy jest to możliwe (jeśli zapas czasu czynności jest niezerowy). W praktyce często termin rozpoczęcia procesu jest uzgadniany z kooperantami, np. moment dostarczenia na plac budowy specjalistycznych maszyn budowlanych czy montażu wyposażenia technologicznego przez specjalizowanych podwykonawców.

Analiza prowadzona metodą symulacji pozwala na wyeliminowanie większości upraszczających założeń metody *PERT*. Zmienne losowe terminu wystąpienia zdarzeń, także terminu końcowego, określane są na podstawie zarejestrowanych obserwacji (pomiarów) w symulatorze z kolejnych przebiegów symulacyjnych. Dysktrybucje rozkładów są nieznane – określa się je na podstawie próby (obserwacji). Komputerowe wspomaganie metody symulacji pozwala na wygenerowanie próby o dużej liczebności, co podnosi wiarygodność statystyczną rezultatów.

W metodzie symulacyjnej uwzględnia się wpływ wszystkich ciągów dochodzących do węzła na termin zaistnienia zdarzenia. W modelu symulacyjnym można

wprowadzić dodatkowe ograniczenia czasowe terminów rozpoczynania czynności w stosunku do momentu wystąpienia innych zdarzeń (rozpoczynania i zakończenia realizacji pozostałych procesów), jako opóźnienia o charakterze deterministycznym lub losowym. Daje to możliwość modelowania ustalonych z góry terminów umownych rozpoczynania prac przez podwykonawców lub weryfikacji wielkości buforów czasu wprowadzanych do modelu w celu zwiększenia prawdopodobieństwa dotrzymania terminu umownego (Jaśkowski i Biruk, 2011).

W modelach sieciowych można uwzględnić dodatkowe ograniczenie w postaci dostępności zasobów odnawialnych. Równoległe wykonywanie czynności może spowodować przekroczenie limitów dostępności zasobów. W modelu musi zostać wprowadzony sposób alokacji zasobów. Przebieg przedsięwzięcia jest symulowany wielokrotnie przy różnych strategiach alokacji, w celu ustalenia postępowania zapewniającego osiągnięcie głównego celu realizacji przedsięwzięcia, np. skrócenia czasu trwania przedsięwzięcia, maksymalizacji stopnia wykorzystania zasobów, czy zapewnienia równomierności zapotrzebowania na nie lub minimalizacji wartości aktualnej netto przedsięwzięcia (*NPV*). Przydział zasobów może odbywać się w sposób losowy lub mogą być stosowane reguły priorytetowe, które w pierwszej kolejności przypisują zasoby do procesu (Kanagasabapathi i Ananthanarayanan, 2005; Kempainen, 2005):

- najdłużej oczekującego (FIFO – "*first-in-first-out*"),
- najkrócej oczekującego (LIFO – "*last-in-first-out*"),
- o najmniejszym zapasie czasu,
- o najwcześniejszym/najpóźniejszym planowanym terminie zakończenia,
- o najdłuższym/najkrótszym czasie realizacji,
- najbardziej opóźnionego w stosunku do terminów planowanych,

lub przydział jest dokonywany w taki sposób, aby zmaksymalizować liczbę równoległe realizowanych procesów.

Wartości priorytetów mogą być stałe lub się zmieniać w kolejnych przebiegach symulacyjnych i być obliczane na podstawie stanu realizacji przedsięwzięcia (parametrów rejestrowanych w symulatorze).

7.3. Analiza i sformułowanie problemów symulacji modelu sieciowego metodą Monte Carlo

7.3.1. Szacowanie wiarygodności wyników symulacji

Celem analizy modeli sieciowych przedsięwzięć metodą symulacji cyfrowej *Monte Carlo* jest najczęściej ustalenie wartości średniej, wariancji lub typu oraz innych parametrów rozkładu zmiennych terminów zaistnienia zdarzeń i ($i = 1, 2, \dots, m$) na podstawie obserwacji $x_{i,j}$ dokonanych w j ($j = 1, 2, \dots, n$) przebiegach symulacyjnych. Metoda symulacji cyfrowej modelu sieciowego polega na:

- generowaniu – w każdej replikacji j – czasu trwania $c_{i,j}$ czynności zgodnie z przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa, przy zastosowaniu dla każdej czynności l ($l = 1, 2, \dots, k$) niezależnych od siebie ciągów liczb losowych $u_{l,j}$ z przedziału $(0, 1]$, gdzie k to liczba procesów tworzących przedsięwzięcie,

- obliczaniu terminów zaistnień zdarzeń $x_{i,j}$, jak w metodzie ścieżki krytycznej (CPM),
- określeniu rozkładów prawdopodobieństwa i dystrybuant terminów wystąpienia zdarzeń (w tym realizacji całego przedsięwzięcia),
- ocenie wiarygodności statystycznej badań symulacyjnych.

Wartości $x_{i,j}$ zarejestrowane w poszczególnych przebiegach symulacyjnych można traktować jako realizacje zmiennych losowych X_i terminów zaistnienia zdarzeń (Platt, 1974; Tyszer, 1990). Dlatego nieobciążonym estymatorem punktowym średniej $\mu_i = E(X_i)$, wyznaczonym na podstawie n przebiegów symulacyjnych, jest:

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (7.1)$$

a wariancja estymatora $\bar{\mu}_i$ dana jest wzorem:

$$D^2(\bar{\mu}_i) = \frac{\sigma_i^2}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (7.2)$$

gdzie σ_i^2 jest wariancją zmiennej losowej T_i , tzn. $\sigma_i^2 = D^2(X_i)$.

Nieobciążony estymator wariancji jest wyznaczany następująco:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{\mu}_i)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7.3)$$

Wariancja zmiennej losowej terminu zaistnienia zdarzenia i jest nieznaną i wyznaczamy ją na podstawie obserwacji rejestrowanych w kolejnych przebiegach symulacyjnych, a zatem zmienna losowa:

$$t_i = \frac{\bar{\mu}_i - \mu_i}{\frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{n}}} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7.4)$$

ma rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody. Z tablic rozkładu t Studenta o $n-1$ stopniach swobody jest odczytywana taką wartość t_α , dla ustalonego poziomu ufności $1-\alpha$, że:

$$P\{-t_\alpha < t_i < t_\alpha\} = 1-\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7.5)$$

Stąd przedział ufności średniej μ_i można wyznaczyć następująco:

$$P\left\{\bar{\mu}_i - t_\alpha \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{n}} < \mu_i < \bar{\mu}_i + t_\alpha \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (7.6)$$

a długość przedziału ufności terminu wystąpienia zdarzenia wynosi:

$$d_i = 2t_\alpha \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7.7)$$

W praktyce przyjmuje się długość przedziału ufności, jaką chcemy uzyskać, równą niewielkiej części (np. 0,01) obliczonej na podstawie badań symulacyjnych wartości estymatora.

Projektując eksperymenty symulacyjne należy dążyć do minimalizacji długości przedziałów ufności, co jest gwarantem dobrej jakości uzyskanych wyników (Miłoś i Sobotka, 1990). Jednym z podstawowych sposobów zawężania przedziału ufności (redukcji wariancji estymatora) jest zwiększanie liczby przebiegów symulacyjnych, co jednak powoduje wydłużenie czasu badań symulacyjnych. Na dokładność wyznaczanych charakterystyk wpływa także sposób generowania zmiennych (danych) wejściowych lub wybór estymatora. Postępowania, mające na celu zmniejszenie „rozrzutu” obserwowanych wartości zmiennych wyjściowych, w literaturze określa się mianem metod redukcji wariancji (Avramidis, 1996; Law i Kelton, 1996; Tyszer, 1990). Efektywność poszczególnych metod redukcji wariancji zależy przede wszystkim od konfiguracji sieci zależności i stosowanych typów oraz parametrów rozkładów czasu trwania czynności, ale także od doświadczenia i umiejętności badacza. Metody redukcji wariancji w badaniach symulacyjnych sieci stochastycznych były wykorzystywane między innymi w pracach (Avramidis, 1996; Biruk i Jaśkowski, 2012; Biruk i Jaśkowski, 2011).

7.3.2. Definiowanie typów i parametrów rozkładów prawdopodobieństwa czasu wykonania procesów

W komercyjnym oprogramowaniu do analizy przedsięwzięć w warunkach losowych wykorzystuje się predefiniowane generatory liczb losowych o różnych typach rozkładów prawdopodobieństwa. W przypadku ich braku, korzystając z generatorów liczb pseudolosowych U o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1]$, jest możliwe losowanie liczb o dowolnym rozkładzie. W tym celu opracowano wiele metod generowania rozkładów np. odwracania dystrybuanty czy eliminacji oraz specjalizowanych algorytmów dla poszczególnych typów rozkładów (Gentle, 2005; Law i Kelton, 1991; Tyszer, 1990).

Wartość normy czasu pracy, stosowanej zazwyczaj do określenia niezbędnych nakładów czasu na wykonanie procesu w przeciętnych warunkach realizacji, odpowiada wartości mediany rozkładu (nie znamy rozrzutu wartości). Stąd ich przydatność w analizie sieci *PERT* metodą symulacji jest ograniczona. Typy i parametry rozkłady czasów trwania czynności mogą być ustalane na podstawie następujących informacji: oszacowań dokonanych przez ekspertów oraz danych historycznych, analizowanych metodami statystycznymi (Ravindran, 2009).

Jakość oszacowań ekspertów zależy od ich indywidualnych doświadczeń. Eksperci ze strony inwestora mogą mieć tendencję do zbyt optymistycznych oszacowań, natomiast wykonawca stara się uwzględnić w oszacowaniach czasu jak największy poziom ryzyka i jego oszacowanie może być zawyżone.

Rozkłady czasu trwania czynności modelu mogą być ustalane na podstawie danych historycznych, które pochodzą z realizacji przedsięwzięć o podobnym charakterze, realizowanych w zbliżonych warunkach. Uzyskanie niezbędnych informacji jest trudne ze względu na jednorazowy, niepowtarzalny charakter przedsięwzięć budowlanych. W metodach statystycznych należy szczególnie ostrożnie traktować wielkości wykraczające poza zakres danych użytych do budowy

modelu prognostycznego. W metodach symulacyjnych najczęściej przyjmuje się, tak jak w metodzie *PERT*, że czasy realizacji procesów (czynności modelu sieciowego) są zmiennymi losowymi o rozkładzie $beta(t_a, t_b, \alpha, \beta)$. Rozkład definiowany jest poprzez dwie wartości skrajne t_a i t_b oraz parametry kształtu α i β . Rozkład ten nazywa się rozkładem *PERT-beta*, rzadziej *beta PERT*. Rozkład *beta* poprzez zmianę parametrów umożliwia uzyskiwanie różnych kształtów funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Rozkład *beta* na przedziale (t_a, t_b) (niektóre źródła podają przedział domknięty $[t_a, t_b]$) ma funkcję gęstości prawdopodobieństwa w postaci (Jaworski, 1999; Law i Kelton, 1991):

$$f(t) = \frac{(t-t_a)^{\alpha-1}(t_b-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)(t_b-t_a)^{\alpha+\beta-1}}; \quad t_a < t < t_b; \alpha, \beta > 0, \quad (7.8)$$

a funkcja beta dana jest wzorem:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds. \quad (7.9)$$

Wartość oczekiwana μ i wariancja σ^2 rozkładu *beta* wynoszą odpowiednio:

$$\mu = \frac{\alpha \cdot t_b + \beta \cdot t_a}{\alpha + \beta}, \quad (7.10)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (t_b - t_a)^2}{(\alpha + \beta + 1) \cdot (\alpha + \beta)^2}, \quad (7.11)$$

natomiast moda wynosi:

$$m = \frac{t_a(\beta-1) + t_b(\alpha-1)}{\alpha + \beta - 2} \quad \alpha, \beta > 1. \quad (7.12)$$

W metodzie *PERT* zakłada się, że średnia i odchylenie standardowe zmiennej losowej czasu trwania czynności mogą być ustalone na podstawie następujących wzorów (Hillier i Lieberman, 1990; Jaworski, 1999; Malcolm i inni, 1959):

$$\mu = \frac{t_a + 4t_m + t_b}{6}, \quad (7.13)$$

$$\sigma^2 = \frac{(t_b - t_a)^2}{36}, \quad (7.14)$$

gdzie: t_a – czas optymistyczny, t_b – czas pesymistyczny, t_m – czas najbardziej prawdopodobny trwania procesu ($t_a < t_m < t_b$).

Aby wyznaczyć jednoznacznie parametry α i β należy poczynić dodatkowe założenia. Można przyjąć, że średnia zgodna z wyrażeniem (7.10) jest równa średniej obliczanej zgodnie z założeniami metody *PERT* (7.13) oraz wariancje (7.11) i (7.14) są jednakowe. W ogólnym przypadku, obliczenie wartości α i β wymaga rozwią-

zania równania trzeciego stopnia. Davis (2008) wykazał, że dla rozkładu *PERT-beta* (wariant I) można przyjmować:

$$\alpha = \left(\frac{\mu - t_a}{t_b - t_a} \right) \left[\left(\frac{(\mu - t_a) \cdot (t_b - \mu)}{\sigma^2} - 1 \right) \right], \quad (7.16)$$

$$\beta = \left(\frac{t_b - \mu}{t_b - t_a} \right) \left[\left(\frac{(\mu - t_a) \cdot (t_b - \mu)}{\sigma^2} - 1 \right) \right]. \quad (7.17)$$

W celu jednoznacznego ustalenia kształtu krzywej rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, najczęściej przyjmuje się, że $\alpha + \beta = 6$ (wariant II). Uzasadnienie tego założenia podano m.in. w Pleguezuelo (2003) oraz Kamburowski (1997). Parametry kształtu rozkładu beta można wówczas wyznaczyć z następujących wzorów (Vose, 2008):

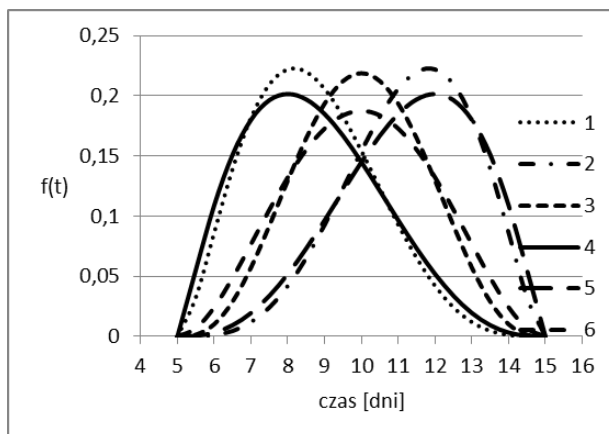
$$\alpha = 6 \frac{(\mu - t_a)}{(t_b - t_a)}, \quad (7.18)$$

$$\beta = 6 \frac{(t_b - \mu)}{(t_b - t_a)}. \quad (7.19)$$

W tabeli 1 przedstawiono parametry rozkładu *PERT-beta* obliczone dla trzech przykładowych czynności (z rozkładem lewoskośnym, symetrycznym i prawoskośnym czasu wykonania), według wariantu I i II, a funkcje gęstości tych rozkładów przedstawiono na rys. 7.1.

Tabela 7.1. Parametry rozkładu *PERT-beta* obliczone dla wariantu I i II

Metoda <i>PERT</i>									
	t_a	t_m	t_b	μ	σ^2	α	β	m	Funkcja gęstości (rys.1)
Czynność a	5,00	8,00	15,00	8,67	2,78				
Czynność b	5,00	12,00	15,00	11,33	2,78				
Czynność c	5,00	10,00	15,00	10,00	2,78				
Rozkład <i>PERT-beta</i> wariant I; równania (16) – (17)									
	t_a	t_m	t_b	μ	σ^2	α	β	m	Funkcja gęstości (rys.1)
Czynność a	5,00	8,00	15,00	8,67	2,78	2,70	4,66	8,17	Krzywa nr 1
Czynność b	5,00	12,00	15,00	11,33	2,78	4,66	2,70	11,83	Krzywa nr 2
Czynność c	5,00	10,00	15,00	10,00	2,78	4,00	4,00	10,00	Krzywa nr 3
Rozkład <i>PERT-beta</i> wariant II; równania (18) – (19)									
	t_a	t_m	t_b	μ	σ^2	α	β	m	Funkcja gęstości (rys.1)
Czynność a	5,00	8,00	15,00	8,67	3,32	2,20	3,80	8,00	Krzywa nr 4
Czynność b	5,00	12,00	15,00	11,33	3,32	3,80	2,20	12,00	Krzywa nr 5
Czynność c	5,00	10,00	15,00	10,00	3,57	4,00	4,00	10,00	Krzywa nr 6



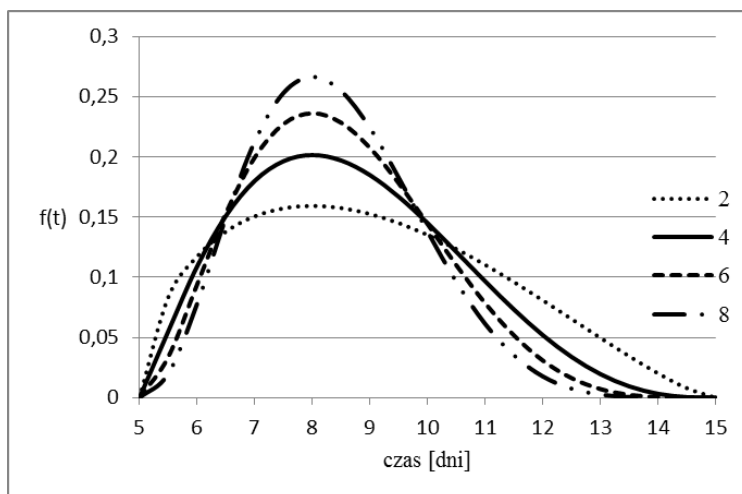
Rys. 7.1. Funkcje *PERT-beta* gęstości prawdopodobieństwa czasu trwania czynności; 1 – czynność *a* (wariant I), 2 – czynność *b* (wariant I), 3 – czynność *c* (wariant I), 4 – czynność *a* (wariant II), 5 – czynność *b* (wariant II), 6 – czynność *c* wariant II

Planista może także korzystać ze zmodyfikowanego rozkładu *PERT-beta*, dla którego (Vose, 2008):

$$\mu = \frac{t_a + \gamma \cdot t_m + t_b}{\gamma + 2}, \quad (7.20)$$

gdzie γ waga czasu najbardziej prawdopodobnego t_m .

Korzystanie ze zmodyfikowanego rozkładu *PERT-beta* pozwala na modelowanie warunków niepewności poprzez zmianę wartości wagi γ (rys. 7.2). Wartość tą szacuje ekspert bazując na doświadczeniu uzyskanym podczas realizacji innych przedsięwzięć.

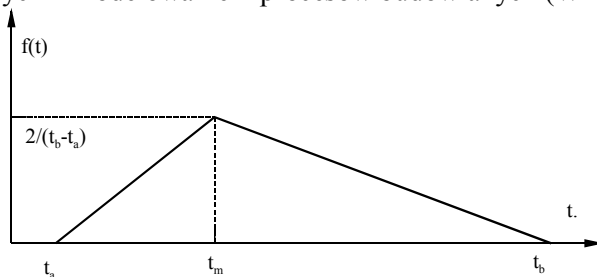


Rys. 7.2. Przykładowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa zmodyfikowanego rozkładu *PERT-beta* czasu trwania czynności, określone na przedziale $[5, 15]$ dla różnych wartości parametru γ

Rozkład trójkątny, oparty o oszacowania czasu optymistycznego t_a , pesymistycznego t_b i czas najbardziej prawdopodobnego t_m (rys. 7.3), o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2(t-t_a)}{(t_m-t_a)(t_b-t_a)} & \text{dla } t_a \leq t \leq t_m \\ \frac{2(t_b-t)}{(t_b-t_m)(t_b-t_a)} & \text{dla } t_m \leq t \leq t_b \end{cases}, \quad (7.21)$$

może – zamiast rozkładu *PERT-beta* – być wykorzystywany do opisu trwania czynności w warunkach niepewności. Jest on prosty i łatwy do interpretacji, nawet dla osób niezwiązanych z modelowaniem procesów budowlanych (Williams, 1992).



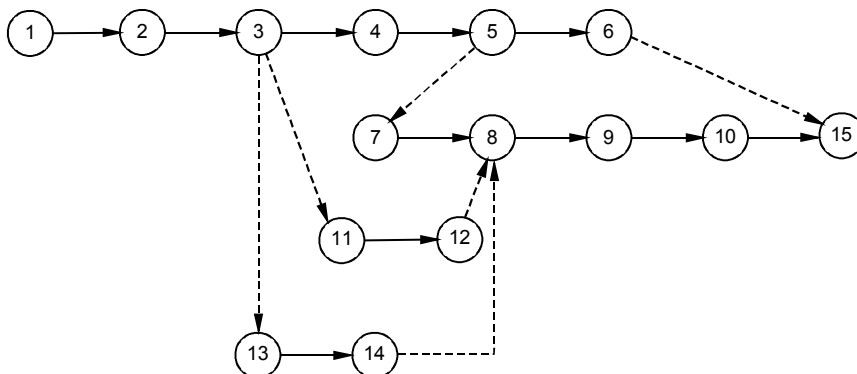
Rys. 7.3. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu trójkątnego określonego na przedziale $[t_a, t_b]$ o wartości najbardziej prawdopodobnej t_m

W przypadkach, gdy łatwo jest oszacować jedynie wartości skrajne, natomiast trudno jest oszacować modę, może być stosowany przy braku innych, lepszych oszacowań, rozkład równomierny na przedziale $[t_a, t_b]$.

7.4. Przykład zastosowania metody symulacji Monte Carlo do analizy przedsięwzięć budowlanych

7.4.1. Podstawowe założenia

Możliwości stosowania metody symulacji komputerowej do analizy modeli sieciowych zostaną przedstawione na przykładzie analizy przedsięwzięcia budowlanego (budowy budynku mieszkalnego), którego graf zależności technologiczno-organizacyjnych przedstawiono na rys. 7.4, a estymowane czasy trwania zestawiono w tabeli 7.2. Badania i analiza modelu przedsięwzięcia zostaną przeprowadzone etapami. W pierwszym etapie do analizy modelu zastosowano klasyczną metodę *PERT*. Drugi etap to badania symulacyjne modelu przedsięwzięcia. Przeprowadzono je przy zastosowaniu dwóch wariantów określania parametrów kształtu rozkładu *beta-PERT* oraz wykorzystano rozkład trójkątny. W trzecim etapie badań uwzględniono ograniczenia terminowe, a w czwartym ograniczenia w dostępności zasobu odnawialnego.



Rys. 7.4. Graf przedsięwzięcia budowlanego (przykład)

Tabela 7.2. Czasy realizacji procesów budowlanych przedsięwzięcia budowlanego

Proces	Nazwa procesu	Czas optymistyczny t_a	Czas najbardziej prawdopodobny t_m	Czas pesymistyczny t_b
1-2	Roboty ziemne	5	6	8
2-3	Konstrukcja	20	30	45
3-4	Dach	8	10	15
4-5	Krycie dachu	5	7	10
5-6	Elewacja	20	25	35
3-7	Ścianki działowe	15	17	22
7-8	Tynki	5	7	10
8-9	Podkłady	6	8	11
9-10	Malowanie	5	7	10
10-15	Posadzki	4	5	7
11-12	Instalacje sanitarne	24	26	29
13-14	Instalacje elektryczne	22	25	32

Według Tyszera (1990) najbardziej pracochłonnym etapem prowadzenia badań symulacyjnych jest proces programowania modeli symulacyjnych. Model może zostać zakodowany za pomocą języka algorytmicznego ogólnego przeznaczenia, np.: *C++* czy *Python*. Wykorzystanie języków programowania pozwala na elastyczne modelowanie złożonych systemów, ale jest pracochłonne. Czas niezbędny do budowy symulatora można skrócić wykorzystując języki symulacyjne, które ułatwiają odwzorowanie analizowanego modelu. Zawierają wbudowane mechanizmy wpływu czasu systemowego i sterowania przebiegiem symulacji, generatory zmiennych losowych oraz procedury zbierania i prezentacji wyników symulacji. Programowanie przy wykorzystaniu języków symulacyjnych pozwala na szybką modyfikację analizowanego problemu. Do najbardziej znanych języków symulacji dyskretnej należą: *GPSS*, *Simscrip* i *Simula*.

Do analizy modeli sieciowych można stosować także tzw. symulatory, które bez znajomości języków programowania pozwalają na zbudowanie modelu, prze-

prowadzenie badań symulacyjnych i analizę wyników (Perkowski, 1980). Do tej grupy należy program *iGrafix® Process™*, w którym można wizualnie stworzyć sieć zależności, zdefiniować typy i parametry rozkładów czasu trwania czynności, określić niezbędne zasoby do ich wykonania oraz definiować zależności pomiędzy czynnościami (obiektami systemu). Wbudowany mechanizm symulacji pozwala na jej prowadzenie bez konieczności sterowania jej przebiegiem. Wadą symulatorów jest mała elastyczność w modelowaniu ograniczeń i wzajemnych interakcji pomiędzy elementami systemu.

Popularnym programem do analizy i planowania przedsięwzięć jest pakiet *Microsoft Project*. W celu implementacji metody symulacji *MC* w tym programie, są stosowane dodatkowe programy tzw. nakładki; np.: *@RISK for Project* firmy Palisade czy *RiskyProject* opracowany w Intaver Institute. *Microsoft Project* jest uniwersalnym narzędziem do planowania przedsięwzięć i nie uwzględnia specyfiki branży budowlanej. Dlatego do bardziej skomplikowanych projektów inżynierskich poleca się stosowanie wyspecjalizowanych programów, np. *Primavera Risk Analysis* (Połoński i Pruszyński, 2006). Program ten ma wbudowane procedury analizy sieci *PERT* metodą symulacji *Monte Carlo*. W obu przypadkach planista ma do dyspozycji wbudowane generatory rozkładów prawdopodobieństwa, najczęściej wykorzystywanych do opisu czasu trwania procesów.

Proste modele symulacyjne można analizować za pomocą arkusza kalkulacyjnego (Davis, 2008). W arkuszu *Excel*, czasy trwania procesów o rozkładzie *PERT-beta* generowane są metodą odwracania dystrybucyjności przy wykorzystaniu funkcji $BETAINV(RAND(); \alpha; \beta; t_a; t_b)$, gdzie formuła $RAND()$ generuje liczbę losową z przedziału $(0, 1)$.

Ze względu na kompromis pomiędzy pracochłonnością programowania a możliwościami modelowania ograniczeń zasobowych i czasowych, symulator sieci *PERT* został zaprogramowany w języku symulacji ogólnego przeznaczenia *GPSS World* firmy *Minuteman Software (General Purpose Simulation System)*. Język ma blokową strukturę, a każdy zdefiniowany blok pełni funkcję symulowanego procesu. Połączenia pomiędzy blokami ustalają zależności kolejnościowe pomiędzy realizowanymi procesami. Przebieg symulacji sterowany jest automatycznie przez program główny, a w bloku *TABULATE* są zapamiętywane czasy realizacji przedsięwzięcia, obliczane w każdym przebiegu symulacyjnym.

W celu uzyskania dużej wiarygodności wyników symulacji (wyrażenie 7), za każdym razem przeprowadzono 10000 replikacji (obliczeń modelu sieciowego). Rozkłady czasu trwania dla każdego z procesów były generowane niezależnie od siebie. Do generowania rozkładu *beta* wykorzystano wbudowany generator $BETA(RN, \alpha, \beta, t_a, t_b)$, gdzie *RN* to numer generatora liczb $U \sim N(0, 1)$. Do losowania wartości czasów o rozkładzie trójkątnym wykorzystano generator systemowy w postaci $TRIANGULAR(RN, t_a, t_b, t_m)$.

7.4.2. Analiza modelu z zastosowaniem metody PERT

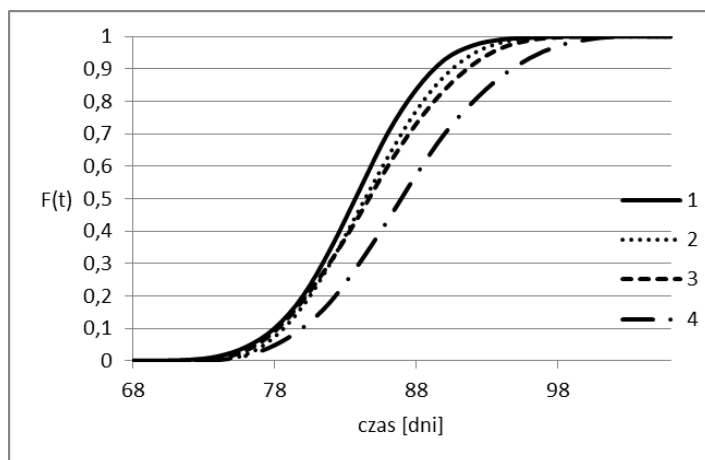
W pierwszej kolejności model sieciowy był analizowany zgodnie z zasadami metody *PERT*, tzn. średnie i wariancje czasów wykonania czynności obliczono zgodnie z wyrażeniami (7.13) i (7.14). Ścieżkę krytyczną (wg wartości oczekiwa-

nych czasów) tworzą czynności: 1–2, 2–3, 3–11, 11–12, 12–8, 8–9, 9–10 i 10–15. W konsekwencji termin końcowy realizacji (wystąpienia zdarzenia 15) traktuje się jako zmienną losową o rozkładzie $N(83,67, 4,46)$ – krzywa 1 na rys. 7.5.

7.4.3. Analiza modelu sieciowego metodą symulacji komputerowej

Przedsięwzięcie analizowano następnie metodą symulacji komputerowej z wykorzystaniem trzech rozkładów czasu trwania czynności bazujących na tych samych oszacowaniach czasu pesymistycznego, najbardziej prawdopodobnego i optymistycznego.

- W sposobie pierwszym średnie i wariancje czasów przyjęto jak w metodzie *PERT*, a parametry kształtu rozkładu beta czasu trwania czynności obliczono zgodnie z wyrażeniami (7.16) i (7.17) – wariant I rozkładu *PERT-beta* (krzywa 2 na rys. 7.5).
- W sposobie drugim parametry kształtu rozkładu czasu trwania czynności obliczono zgodnie z zależnościami (7.18) i (7.19) – wariant II rozkładu *PERT-beta* (krzywa 3 na rys. 7.5).
- W sposobie trzecim założono, że czasy trwania czynności mają rozkład trójkątny (krzywa 4 na rys. 7.5).



Rys. 7.5. Dystrybuanty empiryczne czasu trwania przedsięwzięcia; 1 – metoda *PERT*, 2 – *PERT-beta* wariant I, 3 – *PERT-beta* wariant II, 4 – rozkład trójkątny

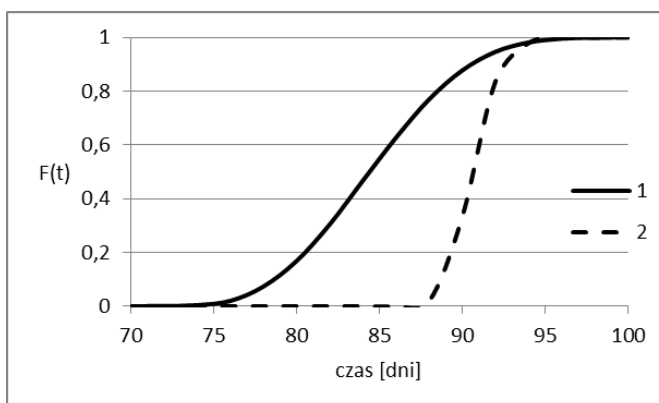
7.4.4. Porównanie wyników analizy modelu sieciowego metodą symulacji komputerowej z metodą *PERT*

Największe wartości czasu realizacji przedsięwzięcia uzyskano przy stosowaniu rozkładów trójkątnych czasów wykonania procesów. W przypadku rozkładu *beta* waga czasu najbardziej prawdopodobnego t_m we wzorze na wartość oczekiwaną jest równa jest 4, natomiast dla trójkątnego 1. Analizując przedsięwzięcie metodą *PERT* (analitycznie), uzyskujemy czas realizacji przedsięwzięcia krótszy niż w metodzie

symulacji, nawet dla tych samych wartości średnich i wariancji czasów trwania wszystkich procesów. Wynika to z uwzględnienia w metodzie symulacyjnej wpływu ciągów podkrytycznych na termin końcowy realizacji przedsięwzięcia. W metodach I i II ustalania parametrów rozkładu *PERT-beta* prawdopodobieństwa dotrzymania terminu realizacji całego przedsięwzięcia są zbliżone do siebie.

7.4.5. Analiza modelu sieciowego z ograniczeniem czasowym rozpoczęcia czynności

W kolejnej analizie założono, że rozpoczęcie czynności 8–9 może nastąpić nie wcześniej niż 70 dnia realizacji a termin ten wynika z zapisów umownych z podwykonawcą. Wprowadzenie warunku ograniczającego wpływa na zmniejszenie prawdopodobieństwa dotrzymania terminu realizacji przedsięwzięcia przed upływem terminu dyrektywnego T_d (rys. 7.6), ale zwiększa prawdopodobieństwo wystąpienia luzów zdarzeń poprzedzających to zdarzenie w sieci zależności.



Rys. 7.6. Empiryczna dystrybuanta czasu trwania przedsięwzięcia; 1 – brak ograniczeń, 2 – ograniczenie $T_s \geq 70$ dni

7.4.6. Analiza modelu sieciowego z ograniczeniem dostępności zasobu odnawialnego

W analizowanym przypadku wprowadzono maksymalny limit pracowników na budowie. Może on wynikać np. z wielkości zaplecza socjalnego. Przyjęto, że proces 1–2 będzie wykonywać brygada złożona z pięciu pracowników, 2–3 z czterech, 3–4 dziesięciu, 4–5 trzech, 5–6 dziesięciu, 3–7 sześciu, 7–8 sześciu, 8–9 pięciu, 9–10 czterech, 10–15 trzech, 11–12 ośmiu oraz 13–14 pięciu. Wprowadzone założenie uniemożliwia równoległą realizację części procesów. Zależność czasu realizacji przedsięwzięcia od poziomu limitu przedstawiono w tabeli 7.3.

W obu badaniach symulacyjnych wykorzystano wariant II ustalania parametrów rozkładu *PERT-beta*.

Tabela 7.3. Wpływ poziomu zatrudnienia na czas realizacji przedsięwzięcia

Wielkość	Limit zatrudnienia na budowie						
	10	11	12	13	14	15	16
Średnia $\bar{\mu}$ zmiennej losowej czasu [dni]	170	151	151	144	137	114	107
Odchylenie standardowe zmiennej losowej czasu $\hat{\sigma}$ [dni]	5,72	5,47	5,47	5,47	5,53	5,17	4,92
Średni poziom zatrudnienia	7,4	8,3	8,4	8,7	9,2	11,0	11,7

7.5. Podsumowanie

Zaletą stosowania metody symulacji w planowaniu przedsięwzięć budowlanych w warunkach losowych jest możliwość uwzględniania wielu ograniczeń realizacyjnych. Powtarzanie analiz przy różnych warunkach brzegowych (założeniach) pozwala na oszacowanie wpływu wielu czynników na przebieg realizacji przedsięwzięcia (np. limitów dostępności zasobów, terminów dyrektywnych rozpoczynania procesów lub etapów robót itd.). Doświadczony planista, dzięki metodzie symulacji *MC*, potrafi wybrać determinanty mające największy wpływ na osiągnięcie celu głównego przedsięwzięcia, ustalić ich wartości optymalne a nawet sporządzić harmonogram niepodatny na dezaktualizację.

O wiarygodności metody decyduje przede wszystkim jakość oszacowania parametrów probabilistycznych modelu, w szczególności rozkładów prawdopodobieństwa czasów trwania procesów budowlanych. Przy braku wiarygodnych danych historycznych, co zazwyczaj ma miejsce w przypadku realizacji przedsięwzięć budowlanych, rozkład *PERT-beta* o właściwie określonych parametrach, może być zastosowany do odwzorowania wpływu zmienności warunków realizacji procesów budowlanych.

Wyniki prac były finansowane z środków statutowych przyznanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego (S/63/2014).

7.6. Literatura

- [1] Avramidis, A. N. i Wilson, J. R. (1996). Integrated Variance Reduction Strategies for Simulation. *Operational Research*, 44(2), 327–346.
- [2] Biruk, S. i Jaśkowski, P. (2012). Ocena skuteczności wybranych metod redukcji wariancji w badaniach symulacyjnych modeli sieciowych przedsięwzięć budowlanych. „*Studia Ekonomiczne*”, *Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, 97, 405–416.
- [3] Biruk, S. i Jaśkowski, P. (2011). Zastosowanie metody losowania LHS w badaniach symulacyjnych modeli sieciowych. *Civil and Environmental Engineering/ Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, 2, 209–213.
- [4] Davis, R. (2008). Teaching Project Simulation in Excel Using PERT-Beta Distributions. *Informations Transactions on Education*, 8(3), 139–148.
- [5] Gentle, J.E. (2005). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Statistics and Computing, Springer.
- [6] Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (1990). *Introduction to Stochastic Models in Operational Research*. Mc-Graw Hill Publishing Company.

- [7] Jaśkowski, P. I Biruk, S. (2011). The Method for Improving Stability of Construction Project Schedules through Buffer Allocation. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(3), 429–444.
- [8] Jaworski, K.M. (1999). *Metodologia projektowania realizacji budowy*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowe PWN.
- [9] Kamburowski, J. (1997). New validations of PERT times. *Omega, International Journal of Management Science*, 25(3), 323–328.
- [10] Kanagasabapathi, B. i Ananthanarayanan, K. (2005). A Simulation Model for Resource Constrained Scheduling of Multiple Projects. Khosrowshahi, F. (red.), 21st Annual ARCOM Conference. (2, strony 823–831). 7–9September 2005, SOAS, University of London: Association of Researchers in Construction Management.
- [11] Kemppainen, K. (2005). *Priority Scheduling Revised - Dominant Rules, Open Protocols and Integrated Orders Management*. Helsinki School of Economics: Acta Universitatis Oeconomicae Helsingiensis.
- [12] Law, A.M. i Kelton W.D. (1991). *Simulation Modeling & Analysis*. Mc-Graw Hill International Editions.
- [13] Malcolm, D.G., Roseboom, J.H. i Clark C.E. (1959). Application of a Technique of Research and Development Program Evaluation. *Operations Research*, 7, 646–669.
- [14] Miłosz, M. i Sobotka, A. (1993). *Organizacja i zarządzanie w budownictwie, Cz. IV. Modelowanie procesów budowlanych*. Lublin: Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Lubelskiej.
- [15] Perkowski, P. (1980). *Technika symulacji cyfrowej*. Warszawa: WNT.
- [16] Platt, C. (1974). *Problemy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. Warszawa: PWN.
- [17] Pleguezuelo, R.F., Pérez, J.G. i Rambaud S.C. (2003). A note on the reasonableness of PERT hypotheses. *Operations Research Letters*, 31, 60 – 62.
- [18] Połośki, M. i Pruszyński K. (2006). Probabilistyczne aspekty procesu budowlanego (cz. 2). *Przegląd Budowlany*, 12, 49–53.
- [19] Ravindran, A.R. (red). (2009). *Operation Research Applications*. CRC Press: Taylor & Francis Group.
- [20] Tyszer, J. (1990). *Symulacja cyfrowa*. Warszawa: WNT.
- [21] Vose, D. (2008). *Risk Analysis: a Quantitative Guide*. John Wiley and Sons.
- [22] Williams, T.M. (1992). Practical Use of Distributions in Network Analysis. *Journal of Operational Research Society*, 43, 265–270.

Abstract

Since its creation in 1958, the Program Evaluation and Review Technique (*PERT*) has been a widely used tool that facilitates project planning in stochastic states. Its popularity results, on the one hand, from the method's accounting for non-deterministic conditions typical for real-life projects, and on the other hand, from the ease of estimating distribution parameters of process durations on the basis of expert opinions. Among the planning techniques, the *PERT*'s contender is *Monte Carlo (MC)* simulation – with its applicability to analysing networks of processes of any

duration distributions without distorting the model with simplifying assumptions. *MC* allows the planner to assume any time, resource or sequence related constraints. These are typical for construction projects with their large number of cooperating contractors.

This chapter presents applications of *Monte Carlo* simulation to scheduling construction projects and the ways of modelling their typical constraints. The consecutive sections describe the problem of analysing network models under non-deterministic conditions and identify the issues arising from applying *MC* to practical cases. An example illustrates the way of analysing a network model and accounting for time and resource related constraints.

A computer simulation of project flow allows the planner to get reliable duration estimates of the project as a whole and its consecutive stages. However, the planner needs to dispose of adequate programming skills or commercial software.